Небольшая олимпиадка

1. Множества $A_1, \ldots, A_{2024}$ являются подмножествами множества $S = \{1, 2, \ldots, 1012\}$. Таких что у каждого множества A_i ровно по 11 элементов, и каждый элемент из S содержится ровно в n множеств A_i.Найдите m.

2. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ положительные действительные числа. Докажите что

$$\sqrt[n]{a_1^n} + \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n} + \cdots + \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_n^n} \geq$$

$$\geq \sqrt[n]{a_1^n + (a_1 + a_2)^n + \cdots + (a_1 + \cdots + a_n)^n}.$$

Когда достигается равенство.

3. Пусть $A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$, где $p, q, r > 0$ и $p + q + r = 1$.
Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$

4. Многочлен с неотрицательными коэффициентами $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + 1$ имеет n действительных корней. Докажите что $P(2023) \geq 2024^n$

5. Докажите что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{t+x} dx$$

выполняется для всех $t > 0$