Задача 1. Пусть $f(x)$–действительная интегрируема на отрезке $[0, 1]$. И пусть выполняется равенство

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$$

Докажите, что:

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \geqslant 2.$$

Задача 2. Можно ли на $\mathbb{R}$ задать ориентированный граф, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Из каждой точки ровно один выход;
2. Начав с любой точки, мы никогда не попадём в цикл (двигаясь по единственному выходу);
3. Начав с любой точки, мы не уйдём в бесконечность (будем оставаться в некотором интервале).

Задача 3. Последовательность вещественных чисел $(x_1, x_2, \dots)$ удовлетворяет соотношению

$$x_n = \frac{n}{1 - x_{n-1}}$$

при всех целых $n \geqslant 1$. Докажите, что $|x_n| < 1000$ при бесконечно многих n.

Задача 4. Пусть точки $A_1, \dots A_{n+1}$ не лежат на одной гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через

$$B(X_1, X_2, \dots, X_k) = \rho(X_1, X_2X_3 \dots X_{n+1})\rho(X_2, X_3X_4 \dots X_{n+1}) \dots \rho(X_{k-1}, X_k),$$

где $X_i \in \mathbb{R}^n$, и $\rho(X, Y)$ это расстояние между точками X и Y, а $\rho(X, Y_1, \dots Y_m)$ это расстояние между m-плоскотью содержащей точки Y_i и точкой X. Докажите что $B(A_1, A_2, \dots, A_{n+1})$ симметричен относительно перестановок.

Задача 5. Пусть $\phi(x) \in C^1(0, +\infty)$, причем

$$\int_0^1 \phi(\alpha x)dx = 2\phi(\alpha), \quad \phi(1) = 81.$$

Найдите $\phi(9)$.

Задача 6. В центре единичного квадрата расположен круг радиуса r, $0 < r < 1/2$. Из середины одной из сторон под случайным углом выпускается точка, отражающаяся от стен квадрата. С какой вероятностью точка никогда не попадёт в круг?

Задача 7. Найдите количество корней уравнения $z^{2n} + az^{2n-1} + 1 = 0$ лежащих в правой полуплоскости, где $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.