Частично отборочный на олимпиаду РУДН

1. Пусть $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ такова, что для любого правильного тетраэдра $ABCD$ в пространстве $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Следует ли из этого, что $f(P) = 0$ для любой точки пространства.

2. Пусть дан тетраэдр с попарно скрещивающимися ребрами длины a и d, b и e, c и f соответственно. Доказать, что объем V такого тетраэдра выражается формулой:

$$144V^2 = a^2d^2(b^2+e^2+c^2+f^2-a^2-d^2)+b^2e^2(a^2+d^2+c^2+f^2-b^2-e^2)+$$
$$+c^2f^2(a^2+d^2+b^2+e^2-c^2-f^2)-(bcd)^2-(ace)^2-(abf)^2-(def)^2.$$

3. Шестигранный игральный кубик подбрасывают 3 раза. Найдите математическое ожидание наименьшего из трех выпавших чисел.

4. Найти 2023-ю производную арктангенса

$$\frac{d^{2023}}{dx^{2023}} \arctan(x)$$

5. Пусть $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, а также $a, b \in \mathbb{C}/\{0\}$ и $a \neq b$. Найдите $det(A-B)$, если известно что

$$AB = aA + bB,$$
$$BA = bA + aB.$$