

Задача 1. а) Предположим, что мы хотим найти $\sqrt[3]{x}$ ($x > 0$) на калькуляторе, который кроме четырех обычных арифметических действий умеет находить \sqrt{x} . Рассмотрим следующий алгоритм. Строится последовательность чисел y_n , в которой y_0 — произвольное положительное число, например, $y_0 = \sqrt{\sqrt{x}}$, а остальные элементы определяются соотношением

$$y_{n+1} = \sqrt{\sqrt{x y_n}} (n \geq 0).$$

Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt[3]{x}.$$

б) Постройте аналогичный алгоритм для вычисления корня пятой степени.

Задача 2. Докажите справедливость следующих утверждений:

- $2|F_n \Leftrightarrow 3|n$;
- $3|F_n \Leftrightarrow 4|n$;
- $4|F_n \Leftrightarrow 6|n$;
- $F_m|F_n \Leftrightarrow m|n$ при $m > 2$.

Задача 3. Определение. Последовательность чисел Люка

$$\{L_0, L_1, L_2, \dots\} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, \dots\}$$

задается равенствами $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ при $n > 1$. Докажите, что числа Люка связаны с числами Фибоначчи соотношениями:

- $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$;
- $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$;
- $F_{2n} = L_n \cdot F_n$;
- $L_{n+1}^2 + L_n^2 = 5F_{2n+1}$;
- $F_{n+2} + F_{n-2} = 3F_n$.

Задача 4. Определим числа a_n и b_n при помощи равенства $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n$, ($n \geq 0$). Найдите формулы n -го члена для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$

Задача 5. Числовая последовательность определяется условиями: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$. Сколько полных квадратов встречается среди первых членов этой последовательности, не превосходящих 10^6 ?

Задача 6. Лягушка прыгает по вершинам шестиугольника $ABCDEF$, каждый раз перемещаясь в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из А в С за n прыжков? Тот же вопрос, но при условии, что ей нельзя прыгать в D?

Задача 7. Определим последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при помощи условий:

$$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \sin(\alpha)^2, \quad y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1} \cos(\alpha)^2, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = \cos(\alpha).$$

Найдите выражение для x_n и y_n через n и α .