

**Задача 1.** Пусть  $Z(n)$  количество цифр в десятичной записи положительного целого числа  $n$ . Известно что для некоторого  $x \in \mathbb{R}$   $Z([x^9]) \leq 15$  и  $Z([x^8]) \geq 14$ , где  $[x]$  наибольшее целое число не превосходящее  $x$ . Чему равен  $Z([x^{24}])$ ?

**Задача 2.** Найдите значение выражения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

**Задача 3.** Пусть  $y(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$yy'' - 2(y')^2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(-1) = 6.$$

Найдите значение  $y(2)$ .

**Задача 4.** Функция непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$ , и дифференцируема на интервале  $(-1, 1)$ , причем  $f(x^2) - f(x)^2 = x(x-1)$ . Чему равна  $f'(0)$ ?

**Задача 5.** Пусть матрица  $A$  порядка  $n \times n$  такая что она не имеет кратных собственных чисел и выполняется следующее равенство

$$(E + A)^{-1} = A^T.$$

Найдите наибольшее значение  $n$ .

( $A^T$  обозначает транспонирование матрицы  $A$ )

**Задача 6.** Вычислить

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sqrt{\sin 2x}} dx.$$

**Задача 7.** В пруду три кувшинки. На одной из них сидит лягушка. Она попеременно прыгает из одной кувшинки на другую. За каждый прыжок она может очутиться на любой из двух незанятых кувшинок. Сколькими способами она может ровно за 9 прыжков вернуться в ту же кувшинку, в которой она изначально сидела?