§1 Начало векторной алгебры и линейные операции над векторами

Определение 1.1. *Вектором* называется упорядоченная пара точек. Первая точка называется началом вектора, вторая –– концом вектора.

Определение 1.2. Суммой двух векторов с одним и тем же числом координат $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ называется вектор $\vec{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ с координатами $c_i = a_i + b_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.3. Произведением вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ на число λ называется вектор $\vec{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ с координатами $c_i = \lambda a_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.4. Два вектора с одним и тем же числом координат $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ считаются равными в том и только в том случае, когда $a_i = b_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.5. Множество всех n-мерных вещественных векторов, в котором введены операции сложения векторов и умножения вектора на число, называется n-мерным вещественным векторным пространством и обозначается $\mathbb{R}^n$.

Упражнения

1.1. В треугольнике ABC точка M делит сторону BC в отношении 3:5 (считая от точки B). Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1.2. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Разложите вектор $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$, где O – точка пересечения медиан треугольника.

1.3. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K – середины сторон BC и CD соответственно. Разложите вектор $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$.

1.4. В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны и $AD = 2BC$. Точка M – середина стороны CD. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$.

1.5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка P – центр грани $A_1B_1C_1D_1$, точка Q – центр грани DD_1C_1C, а L – середина отрезка PQ. Разложите вектор $\overrightarrow{AL}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

1.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина ребра C_1D_1, а точка M делит ребро AA_1 в отношении 1:2 (считая от точки A). Разложите вектор $\overrightarrow{MK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

1.7. В треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке M. Разложите вектор $\overrightarrow{SM}$ по векторам $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

1.8. В правильном тетраэдре $SABC$ точка O – центр треугольника ABC, а точка M – середина ребра SC. Разложите вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AS}$.

1.9. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$, $C(1;2;-3)$. Найдите его четвертую вершину D.

1.10. Даны векторы $\overrightarrow{AC}=(1;-1;6)$ и $\overrightarrow{BD}=(-1;-5;2)$, являющиеся диагоналями параллелограмма $ABCD$, и точка $A(2;3;1)$. Найдите координаты точек B и D.

§2 Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 2.1. Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не равные одновременно нулю, что справедливо равенство

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}. \tag{1}$$

Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ называется *линейно независимой*, если из равенства (1) следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов

1. Любая система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой.
2. Система векторов, содержащая два равных вектора, является линейно зависимой.
3. Система векторов, содержащая два коллинеарных вектора, является линейно зависимой.
4. Система векторов, содержащая более одного вектора, является линейно зависимой тогда и только тогда, когда среди данных векторов имеется такой, который линейно выражается через остальные.
5. Если система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ является линейно независимой, а система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}, \overrightarrow{a_{n+1}}$ является линейно зависимой, то вектор $\overrightarrow{a_{n+1}}$ можно разложить по векторам $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$, притом единственным образом.

Упражнения

2.1. Исследуйте систему векторов на линейную зависимость или независимость:

1. $\vec{a}_1 = (-7;5;19)$, $\vec{a}_2 = (-5;7;-7)$, $\vec{a}_3 = (-8;7;14)$;

2. $\vec{a}_1 = (1; 2; -2)$, $\vec{a}_2 = (0; -1; 4)$, $\vec{a}_3 = (2; -3; 3)$;
3. $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (2; -1; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 4)$;
4. $\vec{a}_1 = (0; 1; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; 1; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 5; 1)$, $\vec{a}_4 = (0; 1; 1; -2)$;
5. $\vec{a}_1 = (-1; 7; 1; -2)$, $\vec{a}_2 = (2; 3; 2; 1)$, $\vec{a}_3 = (4; 4; 4; -3)$, $\vec{a}_4 = (1; 6; -1; 1)$.

2.2. При каких значениях параметра a система векторов является линейно зависимой: $\vec{a}_1 = (1; 2; -1; 1)$, $\vec{a}_2 = (2; 5; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (-1; 0; 5; a)$?

2.3. При каких значениях параметра a система векторов является линейно независимой: $\vec{a}_1 = (2; 1; a; 2)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 2; 1)$?

§3 Задание - 1

3.1. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника ABC.

3.2. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK} = \mathbf{k}$ и $\overrightarrow{AL} = \mathbf{l}$, выразить через векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ векторы BC и CD.

3.3. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки C, делящей отрезок AB в отношении λ, зная, что точки $A(\mathbf{r_1})$ и $B(\mathbf{r_2})$.

3.4. Доказать, что если диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, то четырехугольник есть параллелограмм.

3.5. Даны радиус-векторы $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$ вершин треугольника ABC и его внутренние углы. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ основания перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC.

3.6. Показать, что три точки $A(\mathbf{a})$, $B(\mathbf{b})$ и $C(\mathbf{c})$, где $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\lambda + \mu = 1$.

3.7. Показать, что четыре точки $A(\mathbf{a})$, $B(\mathbf{b})$ и $C(\mathbf{c})$ и $D(\mathbf{d})$, где $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$, лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\lambda + \mu + \nu = 1$.

3.8. Пусть радиус-векторы вершин ΔABC соответственно равны $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и найти радиус-вектор этой точки.

3.9. Доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3.10. Найти радиус-вектор точки пересечения биссектрис ΔABC, если радиус-векторы вершин есть $A(\mathbf{r_1})$, $B(\mathbf{r_2})$, $C(\mathbf{r_3})$, а противолежащие этим вершинам стороны соответственно равны a, b, c.

3.11. Найти центр тяжести системы трех материальных точек $A(\mathbf{r_1})$, $B(\mathbf{r_2})$, $C(\mathbf{r_3})$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, m_3 зная, что центр тяжести двух масс лежит на линии, соединяющей эти массы, и делит ее в отношении, обратно пропорциональной массам.

§4 Базис, координаты, размерность линейного пространства. Ранг системы векторов

Определение 4.1. Упорядоченная система векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ называется базисом линейного пространства L, если выполнены следующие условия:

1. Векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ линейно независимы;
2. Для любого вектора $\vec{a}$ из линейного пространства L существует такой набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \cdots + a_n\vec{e_n}$$

Последнее равенство называется разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$, а коэффициенты, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – координатами вектора$\vec{a}$ в данном базисе.

Теорема. *Разложение элемента $\vec{a}$ линейного пространства L по данному базису единственно, т. е. существует единственный такой набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что*

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \cdots + a_n\vec{e_n}$$

Теорема. *Число векторов базиса линейного пространства определено однозначно*

Определение 4.2. Размерностью линейного пространства L называется количество векторов его базиса. Размерность пространства L обозначается $dim\ L$.

Определение 4.3. Линейной оболочкой набора векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ называется множество всевозможных линейных комбинаций $\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \cdots + \alpha_k\vec{a_k}$ данных векторов с произвольными коэффициентами α_j, $1 \leq j \leq k$, из поля действительных чисел $\mathbb{R}$. Линейная оболочка векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ обозначается $L(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k})$.

Примеры базисов

1. Любая тройка некомпланарных векторов является базисом в пространстве $\mathbb{R}^3$.
2. Рассмотрим линейное пространство векторов $\vec{a} = (x; y)$, координаты которых удовлетворяют условию $y = 3x$. Векторы этого линейного пространства имеют общий вид $\vec{a} = (x; 3x)$. Поэтому базис состоит из одного вектора, например $\vec{e_1} = (1; 3)$.

3. В линейном пространстве многочленов степени, не превышающей два, в качестве базиса можно взять векторы $\vec{e_1} = 1$, $\vec{e_2} = x$, $\vec{e_3} = x^2$. Действительно, элементы этого линейного пространства имеют общий вид $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, тогда в указанном базисе этот многочлен можно представить как $P_2(x) = c\vec{e_1} + b\vec{e_2} + a\vec{e_3}$, а значит, тройка чисел c, b, a является координатами многочлена $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ в базисе $\vec{e_1} = 1$, $\vec{e_2} = x$, $\vec{e_3} = x^2$.

Определение 4.4. Рангом системы векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_k}$ называется размерность их линейной оболочки. Если количество векторов базиса линейной оболочки равно s, то это записывается как $s = rank(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_k})$.

Упражнения

4.1. Разложите вектор $\vec{x}(4; 3; -2)$ по векторам

$$\vec{e_1}(1; 1; 2), \vec{e_2}(-3; 0; -2), \vec{e_3}(1; 2; -1).$$

4.2. Разложите вектор $\vec{x}(2; 2; 3; 3)$ по векторам

$$\vec{e_1}(1; 2; 3; 1),\ \vec{e_2}(2; 1; 2; 3),\ \vec{e_3}(3; 2; 4; 4).$$

4.3. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, и с корнем $x = 1$ найдите какой-нибудь базис. Найдите в этом базисе разложение многочлена $T(x) = x^2 - 3x + 2$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в выбранном базисе.

4.4. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, найдите разложение многочлена $T(x)$ по базису $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в данном базисе:

$$T(x) = 3x^2+2x+1, \quad P(x) = 4x^2+3x+4, \quad Q(x) = 3x^2+2x+3, \quad R(x) = x^2+x+2.$$

4.5. Найдите какой-нибудь базис в указанном линейном пространстве L. Найдите координаты элемента $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ в этом базисе. В ответе укажите координаты элемента A в выбранном базисе:

1. L – линейное пространство всех матриц размера 2×2;
2. L – линейное пространство симметричных матриц размера 2×2;

3. L – линейное пространство матриц размера 2×2 вида $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right)$.

4.6. В линейном пространстве симметричных матриц размера 2×2 найдите координаты элемента $A=\left(\begin{smallmatrix} 4 & 8 \\ 8 & -2\end{smallmatrix}\right)$ в базисе

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_3=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

4.7. Найдите ранг системы векторов и укажите какой-нибудь базис в этой системе векторов. Векторы, не входящие в базис, разложите по базису:

1. $\vec{a_1}=(1;1;2),\ \vec{a_2}=(3;1;2),\ \vec{a_3}=(1;2;1),\ \vec{a_4}=(2;1;2)$,
2. $\vec{a_1}=(1;1;1),\ \vec{a_2}=(-3;-5;5),\ \vec{a_3}=(3;4;-1),\ \vec{a_4}=(1;-1;4)$,
3. $\vec{a_1}=(1;1;0;-1),\ \vec{a_2}=(1;2;1;0),\ \vec{a_3}=(1;3;2;1),\ \vec{a_4}=(1;4;3;2)$,
4. $\vec{a_1}=(1;0;1;0),\ \vec{a_2}=(-2;1;3;-7),\ \vec{a_3}=(3;-1;0;3),\ \vec{a_4}=(-4;1;-3;1)$,
5. $\vec{a_1}=(1;1;4;2),\ \vec{a_2}=(1;-1;-2;4),\ \vec{a_3}=(0;2;6;-2),\ \vec{a_4}=(-3;3;-12),\ \vec{a_5}=(-1;0;-4;-3)$,
6. $\vec{a_1}=(1;3;0;5),\ \vec{a_2}=(1;2;0;4),\ \vec{a_3}=(1;1;1;3),\ \vec{a_4}=(1;0;-1;2),\ \vec{a_5}=(1;-3;3;-1)$.

§5 Скалярное произведение. Элементы аналитической геометрии

Пусть каждой паре векторов $\vec{a},\vec{b}\in V(E)$ поставлено в соответствие вещественное число $(\vec{a},\vec{b})$, называемое скалярным произведением этих векторов, причем выполнены условия

1. $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a}),\forall\vec{a},\vec{b}\in V(E)$
2. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{a},\vec{c}),\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V(E)$
3. $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\lambda(\vec{a},\vec{b}),\forall\vec{a},\vec{b}\in V(E)$ и $\lambda\in E$
4. $(\vec{a},\vec{a})\geq 0$ и если $(\vec{a},\vec{a})=0\iff\vec{a}=\vec{0},\forall\vec{a}\in V(E)$

Упражнения

5.1. Даны вершины треугольника ABC: $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$ и $C(-4;0;3)$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A.

5.2. Параллелограмм построен на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{k} - 3\vec{j}$. Определите длины его диагоналей.

5.3. Даны векторы $\vec{a} = (4;-2;4)$ и $\vec{b} = (6;-3;2)$. Найдите $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

5.4. Даны длины векторов $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Найдите $|\vec{a} - \vec{b}|$.

5.5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\phi = 60^\circ$, причем $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$. Определите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

5.6. Параллелограмм построен на векторах $\overrightarrow{AB} = (2.5;1;2.5)$ и $\overrightarrow{AD} = (0.5;-1;1.5)$. Найдите угол между его диагоналями.

5.7. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 120°. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5.8. Найдите длину проекции вектора $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.

5.9. Найдите косинус угла между вектором $\vec{a} = (3;-4;5)$ и вектором $\vec{b}$ – проекцией вектора $\vec{a}$ на координатную плоскость xOy.

5.10. Найдите $\cos(\vec{b}, \vec{c})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -7$ и $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

5.11. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{c}$, если $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 1$, $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5}{6}$ и $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$.

5.12. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Известны длины векторов $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$. Определите косинус угла между векторами $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

§6 Смешанное и векторное произведения

Рассмотрим параллелепипед, построенный на трех векторах так, что три его ребра, исходящие из одной вершины, являются векторами с общим началом. Параллелепипед называется ориентированным, если эти три ребра упорядочены. В ориентированном пространстве ориентация параллелепипеда положительна или отрицательна в зависимости от того, какую тройку векторов образуют векторы, на которых он построен.

В ориентированном пространстве объем ориентированного параллелепипеда — число со знаком: объем положительно ориентированного параллелепипеда считается положительным, а отрицательно ориентированного — отрицательным.

Всюду далее в пространстве выбрана положительная (правая) ориентация.

Определение 6.1. Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (в данном порядке) называется число, равное общему ориентированного параллелепипеда, если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ не компланарны, и равное нулю, если компланарны.

Смешанное произведение векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Упражнение 6.1. Докажите что для любых векторов $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ существует единственный вектор $\mathbf{d}$, такой что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{ad}, \text{ для любого вектора } \mathbf{a}.$$

Определение 6.2. Вектор $\mathbf{d}$ из задачи выше называется векторным произведением векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Векторное произведение векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ обозначается $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ или $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

Таким образом, векторное произведение $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ – это вектор, такой что

1. $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ортогонален векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$;
2. $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{b}|\ |\mathbf{c}|\ sin(\phi)$, где ϕ – угол между ними;
3. тройка векторов $\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ – правая.

Упражнение 6.2. (Свойства смешанного произведения) Для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ и любого скаляра α выполнены равенства:

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})$;
2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$;
3. $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$;
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Упражнение 6.3. (Свойства векторного произведения) Для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и любого скаляра α выполнены равенства:

1. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{b}$;
2. $(\alpha\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$;
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$;

Упражнение 6.4. Пусть $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}\}$ – ортонормированный, положительно ориентированный базис пространства. Пусть в данном базисе известны координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найдите координаты их векторного произведения.

Упражнение 6.5. Пусть $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}\}$ – ортонормированный, положительно ориентированный базис пространства. Пусть в данном базисе известны координаты векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Чему будет равно $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Теорема (Тождество Лагранжа, БАЦ минус ЦАБ). *Для любых векторов* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *верно тождество*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Упражнения

6.1. Какой угол составляют между собой два вектора $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

6.2. Доказать, что вектор $\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{a}(\mathbf{bc})$ перпендикулярен $\mathbf{c}$.

6.3. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

6.4. Дан равносторонний треугольник ABC, у которого длины сторон равны a. Вычислить выражение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

6.5. Доказать теорему косинусов в векторной форме.

6.6. Используя векторы, вывести формулу для косинуса суммы двух углов.

6.7. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке

6.8. Зная векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, найти:

(a) $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})$;

(b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$;

(c) $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \times (\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}}{2})$

6.9. Показать, что $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2\mathbf{b^2}$.

6.10. Доказать тождества

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}).$$

6.11. Показать, что если векторы $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ компланарны, то они коллинеарны.

6.12. Показать, что если $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = 0$, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны.

6.13. Доказать тождество

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$$

§7 Контрольная работа

7.1. В треугольнике ABC точка M делит сторону BC в отношении $3:5$ (считая от точки B). Выразите вектор $\vec{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

7.2. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Разложите вектор $\overrightarrow{DO}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$, где O – точка пересечения медиан треугольника

7.3. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K –– середины сторон BC и CD соответственно. Разложите вектор $\overrightarrow{AD}$ по векторам $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$.

7.4. В каком случае множество всех векторов плоскости xOy, концы которых лежат на данной прямой, а начала совпадают с началом координат, является линейным подпространством?

7.5. Является ли линейным подпространством совокупность векторов из $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$? А если поменять 0 на 1?

7.6. Найдите точку, симметричную точке $P = (0; -1; 3)$ относительно плоскости $2x + y - 2z - 2 = 0$.