

ребре BC , O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырехугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найдите отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$4OL = 3OK, 25ON = 24OM, \\ DK \cdot NA - KA \cdot BN = KA \cdot NA.$$

4674. Все высоты пирамиды $ABCD$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $AB = 9$, $BC = 13$, а угол ADC равен 60° . Найдите ребро BD .

4675. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP , LP , NQ , MQ , PQ касаются некоторого шара. Найдите объем этого шара.

4676. Отрезок EF параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $ABCD$, причем $EF = 3$, $BC = 5$. Все стороны прямоугольника $ABCD$ и отрезки AE , BE , CF , DF , EF касаются некоторого шара. Найдите площадь поверхности этого шара.

4677. Объем пирамиды $SABC$ равен V . Через точки M и N , лежащие на ребрах AS и AB соответственно, и внутреннюю точку P грани ABC проведена плоскость, пересекающая прямую CS в точке L (рис. 192). Пусть D и E — точ-

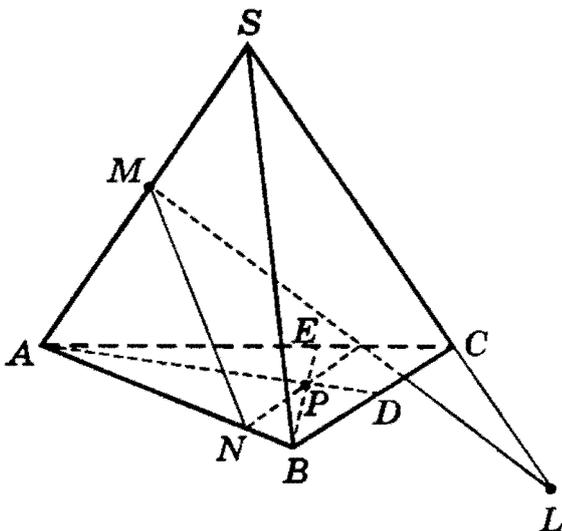


Рис. 192

ки пересечения прямых AP и BP с ребрами BC и AC соответственно. Известно, что $AN = NC$, $AM = MS$, $AP = 3PD$ и $BP = 2PE$. Найдите объем пирамиды $ACLN$.

8. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ. МЕТОД КООРДИНАТ

4678. Через точку $M(-2; 0; 3)$ проведите плоскость, параллельную плоскости $2x - y - 3z + 5 = 0$.

4679. Найдите угол между прямой, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$ и $B(2; 1; -1)$, и прямой, проходящей через точки $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$.

4680. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите угол между прямыми AB и CD .

4681. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите угол между прямыми AB и CD .

4682. Найдите острый угол между плоскостями $2x - y - 3z + 5 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.

4683. Через середину отрезка с концами в точках $P(-1; 2; 5)$ и $Q(3; -4; 1)$ проведите плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через точки $A(0; -2; -1)$ и $B(3; 2; -1)$.

4684. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 4. Найдите угол между его диагоналями.

4685. Высота AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ вдвое больше каждой из сторон основания. Найдите угол между прямыми BD_1 и AM , где M — точка пересечения диагоналей грани DCC_1D_1 .

4686. Даны три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Докажите, что вектор \vec{c} перпендикулярен вектору $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$.

4687. Даны три некопланарных вектора. Существует ли четвертый вектор, перпендикулярный трем данным?

4688. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 6$. Точка N — середина ребра CD , точка M расположена на ребре CC_1 , причем $C_1 M : CM = 1 : 2$, K — точка пересечения диагоналей грани $AA_1 D_1 D$. Найдите угол между прямыми KM и $A_1 N$.

4689. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AB = 4$, $AD = 6$, $AA_1 = 2$. Точки F и K расположены на ребрах AD и $B_1 C_1$ соответственно, причем $AF : FD = C_1 K : KB_1 = 1 : 2$, P — точка пересечения диагоналей грани $ABCD$. Найдите угол между прямыми PK и $B_1 F$.

4690. Дан тетраэдр $ABCD$. Все плоские углы при вершине D — прямые; $DA = 1$, $DB = 2$, $DC = 3$. Найдите медиану тетраэдра, проведенную из вершины D .

4691. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На отрезках AB_1 и BC_1 взяты точки P и Q , причем $AP : PB_1 = C_1 Q : QB = 2 : 1$. Докажите, что отрезок PQ перпендикулярен прямым AB_1 и $C_1 B$, найдите его длину, если ребро куба равно a .

4692. Проведите плоскость через точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$ и $C(-2; 2; 0)$.

4693. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$. Найдите уравнение плоскости ABC .

4694. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC .

4695. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC .

4696. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите острый угол между плоскостями ABC и $B_1 CD$.

4697. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$. Найдите уравнение плоскости MNK .

4698. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку L параллельно плоскости MNK .

4699. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите расстояние от точки L до плоскости MNK .

4700. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите острый угол между плоскостями MNK и NKL .

4701. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$. Найдите уравнение плоскости ABC .

4702. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC .

4703. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите острый угол между плоскостями ABC и $B_1 CD$.

4704. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC .

4705. Даны точки $A(-3; 0; 1)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите параметрические уравнения прямой AD .

4706. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$. Найдите уравнение плоскости ABC .

4707. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC .

4708. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите острый угол между плоскостями ABC и $B_1 CD$.

4709. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC .

4710. Даны точки $A(2; -1; 0)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите параметрические уравнения прямой AD .

4711. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны a , b и c . Найдите угол между скрещивающимися диагоналями двух граней с общим ребром a .

4712. В тетраэдре $ABCD$ известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$, $AD = DB = 2$, $DC = 4$. Найдите медиану тетраэдра, проведенную из вершины D .

4713. (Формула Лейбница.) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC , O — произвольная точка пространства. Докажите, что

$$OM^2 = \frac{1}{3}(OA^2 + OB^2 + OC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + AC^2).$$

4714. Непересекающиеся диагонали двух смежных граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β . Найдите угол между этими диагоналями.

4715. Дан тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = BD = 3$, $AC = CD = 5$, $AD = BC = 4$. Найдите AM , где M — точка пересечения медиан грани BCD .

4716. Известно, что \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} — некопланарные векторы. Докажите, что векторы $\vec{m} = -3\vec{a} + 4,5\vec{b} - 7\vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ и $\vec{p} = -2\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ компланарны.

4717. Известно, что \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} — некопланарные векторы. Докажите, что векторы $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$ также некопланарны.

4718. Докажите, что для любых четырех точек пространства верно равенство $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$.

4719. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-2; 0; 3)$ перпендикулярно плоскости, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$, $P(-1; 2; 5)$ и $Q(3; -4; 1)$.

4720. Найдите расстояние от точки $D(1; 3; 2)$ до плоскости, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$ и $C(-2; 2; 0)$.

4721. Составьте параметрические уравнения прямой пересечения плоскостей $2x - y - 3z + 5 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.

4722. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите угол между прямой AB и плоскостью BCD .

4723. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите угол между прямой MN и плоскостью NKL .

4724. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, где AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 — параллельные ребра, плоскость P проходит через диагональ $A_1 C_1$ грани куба и середину ребра DD_1 . Найдите расстояние от середины ребра CD до плоскости P , если ребро куба равно 4.

4725. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, где AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 — параллельные ребра, плоскость P проходит через противоположные вершины A_1 , C и середину ребра $D_1 C_1$. Найдите расстояние от вершины D_1 до плоскости P , если ребро куба равно 6.

4726. Основанием пирамиды $HPQR$ является равносторонний треугольник PQR , сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро HR перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра QR , а другая проходит через точку R и середину ребра PQ .

4727. Основанием пирамиды $HPQR$ является равнобедренный прямоугольный треугольник PQR , гипотенуза PQ которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро HR перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых

проходит через точку H и середину ребра PR , а другая проходит через точку R и середину ребра PQ .

4728°. Каждое ребро треугольной пирамиды $PABC$ равно 1; BD — высота треугольника ABC . Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC , причем точки P и E лежат по одной сторону от плоскости ABC . Найдите расстояние между точками P и E .

4729. Найдите угол между прямой пересечения плоскостей $2x - y - 3z + 5 = 0$ и $x + y - 2z = 0$ и плоскостью, проходящей через точки $M(-2; 0; 3)$, $N(0; 2; 2)$ и $K(3; -3; 1)$.

4730. На диагоналях D_1A , A_1B , B_1C , C_1D граней куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки M , N , P , Q , причем $D_1M : D_1A = BN : BA_1 = B_1P : B_1C = DQ : DC_1 = \mu$, а прямые MN и PQ взаимно перпендикулярны. Найдите μ .

4731. Через прямую

$$\frac{x-1}{2} = -\frac{y}{3} = 3-z$$

проведите плоскость, параллельную прямой пересечения плоскостей $4x + 5z - 3 = 0$ и $2x + y + 2z = 0$.

4732. Найдите расстояние между прямой, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$ и $B(2; 1; -1)$, и прямой, проходящей через точки $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$.

4733. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 3$, $BC = 2$, $CC_1 = 4$. На ребре AB взята точка M , причем $AM : MB = 1 : 2$; K — точка пересечения диагоналей грани $CC_1 D_1 D$. Найдите угол и расстояние между прямыми D_1M и B_1K .

4734. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .

4735. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Най-

дите расстояние между прямыми MN и KL .

4736. Даны точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .

4737. Даны точки $A(2; -1; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C(1; 2; 2)$ и $D(-3; 0; 4)$. Найдите расстояние между прямыми AB и CD .

4738. Найдите расстояния между скрещивающимися медианами двух граней правильного тетраэдра со стороной a .

4739. Через точку $M(-2; 0; 3)$ проведите прямую, пересекающую прямые

$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 3, \\ z = -2 + t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 2x - 2y - z - 4 = 0, \\ x + 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

4740. Даны точки $A(1; 0; 1)$, $B(-2; 2; 1)$, $C(2; 0; 3)$ и $D(0; 4; -2)$. Найдите параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и пересекающей прямые AB и CD .

4741. Даны точки $M(2; -5; 0)$, $N(3; 0; 4)$, $K(-2; 2; 0)$ и $L(3; 2; 1)$. Найдите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $P(1; 0; 1)$ и пересекающей прямые

$$\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ 2x + y = 0, \\ z = -2 + t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 0. \end{cases}$$

4742. В правильной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона основания равна

4а, боковое ребро равно a . Точки D и E — середины ребер A_1B_1 и NC . Отрезок MN с концами на прямых AC и BB_1 пересекает прямую DE и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

4743. На ребрах AA_1 , AB , B_1C_1 и BC единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты точки K , L , M и N соответственно так, что $AL = \frac{2}{3}$, $B_1M = \frac{1}{4}$, $CN = \frac{3}{10}$. Определите, какое из ребер, AB или AD , пересекает плоскость, параллельную отрезку ML и содержащую отрезок KN . В каком отношении это ребро делится плоскостью?

4744. Найдите угол между двумя скрещивающимися медианами двух граней правильного тетраэдра (рис. 193, а, б).

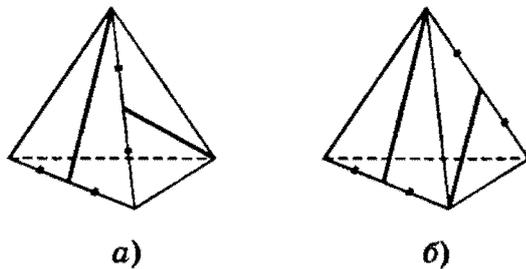


Рис. 193

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

4745. Докажите, что общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых есть наименьшее из расстояний между точками этих прямых.

4746. Докажите, что угол наклона с плоскостью есть наименьший из углов, образованных этой наклонной с прямыми плоскости.

4747. Докажите, что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего.

4748. Докажите, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° .

4749. Дан куб с ребром 1. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до его вершин не меньше $4\sqrt{3}$.

4750. Сфера радиуса 2 пересечена плоскостью, удаленной от центра на расстояние, равное 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности сферы между двумя наиболее удаленными точками сечения.

4751. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба между его противоположными вершинами.

4752. Докажите, что плоский угол выпуклого четырехгранного угла меньше суммы трех остальных.

4753. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

4754. Найдите высоту и радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в сферу радиуса R .

4755. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4, а основания являются квадратами. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислите этот периметр.

4756. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен $\frac{1}{2}$, а одна из боковых граней является квадратом. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания и вычислите этот периметр.

4757. Найдите наибольший возможный объем цилиндра, вписанного