

дите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей, если известно, что ее центр удален от прямой AC на расстояние, равное a .

2427. Площадь трапеции $ABCD$ равна S , отношение оснований — $AD : BC = 2 : 1$. Отрезок MN расположен так, что он параллелен диагонали BD , пересекает диагональ AC , а отрезок AM параллелен отрезку CN . Найдите площадь четырехугольника $AMND$, если $CN : AM = 3 : 1$, $BD : MN = 6 : 1$. (Найдите все решения.)

11. КООРДИНАТЫ. ВЕКТОРЫ

2428. Точка $M(x_0; y_0)$ — середина отрезка с концами в точках $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Докажите, что

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ и } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

2429. Пусть M — середина отрезка AB , O — произвольная точка. Докажите, что $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

2430. Даны точки $A(-1; 5)$ и $B(3; -7)$. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB .

2431. Даны точки $A(3; 5)$, $B(-6; -2)$ и $C(0; -6)$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

2432. Даны точки $A(2; 4)$, $B(6; -4)$ и $C(-8; -1)$. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

2433. Даны точки $A(0; -2)$, $B(-2; 1)$, $C(0; 0)$ и $D(2; -9)$. Укажите те из них, которые лежат на прямой $2x - 3y + 7 = 0$.

2434. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3, 1)$ параллельно: а) оси x ; б) оси y .

2435. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3; 2)$ параллельно прямой $2x - 3y + 4 = 0$.

2436. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения

прямых $3x + 2y - 5 = 0$ и $x - 3y + 2 = 0$ параллельно оси ординат.

2437. Найдите радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением:

а) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$;

б) $x^2 + y^2 - 2(x - 3y) - 15 = 0$;

в) $x^2 + y^2 = x + y + \frac{1}{2}$.

2438. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AF} = \vec{b}$. Найдите векторы $\vec{AD}$, $\vec{BD}$, $\vec{FD}$ и $\vec{BM}$, где M — середина стороны EF .

2439. Нарис. 97 дана точка $M(-1, 3)$. Найдите координаты точки, симметричной точке M относительно: а) оси x ; б) оси y ; в) начала координат; г) точки $K(3; 1)$; д) биссектрисы I и III координатных углов; е) биссектрисы II и IV координатных углов.

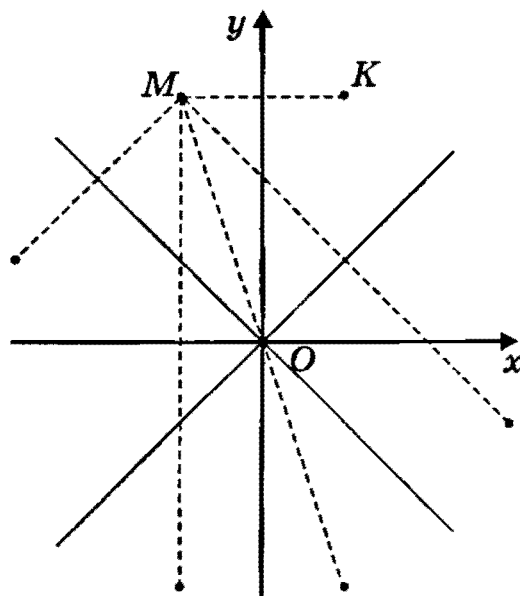


Рис. 97

2440. Найдите координаты вершин треугольника, стороны которого лежат на прямых $2x + y - 6 = 0$, $x - y + 4 = 0$ и $y + 1 = 0$.

2441. Даны точки $A(-2; 2)$, $B(-2; -2)$ и $C(6; 6)$. Составьте уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC .

2442. Даны точки $A(4; 1)$, $B(-8; 0)$ и $C(0; -6)$. Составьте уравнение прямой, на которой лежит медиана AM треугольника ABC .

2443. Докажите, что точки $A(-1; -2)$, $B(2; -1)$ и $C(8; 1)$ лежат на одной прямой.

2444. Даны точки $A(-2; 0)$, $B(1; 6)$, $C(5; 4)$ и $D(2; -2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

2445. Найдите расстояние между точкой $A(1; 7)$ и точкой пересечения прямых $x - y - 1 = 0$ и $x + 3y - 12 = 0$.

2446. Даны точки $A(0; 0)$, $B(-2; 1)$, $C(3; 3)$, $D(2; -1)$ и окружность $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$. Выясните, где расположены эти точки: на окружности, внутри или вне окружности.

2447. Точка M делит сторону BC треугольника ABC в отношении $\frac{BM}{MC} = \frac{2}{5}$. Известно, что $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$.

Найдите вектор $\vec{AM}$.

2448. Даны точки $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$ и $C(4; -1)$. Точка D лежит на продолжении медианы AM за точку M , причем четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм. Найдите координаты точки D .

2449. Окружность с центром в точке $M(3; 1)$ проходит через начало координат. Составьте уравнение окружности.

2450. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — медианы треугольника ABC . Докажите, что $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.

2451. Пусть M — середина отрезка AB , M_1 — середина отрезка A_1B_1 . Докажите, что $\vec{MM_1} = \frac{1}{2}(\vec{AA_1} + \vec{BB_1})$.

2452. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$

2453. $M_1, M_2, \dots, M_6$ — середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2\dots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6 .

2454. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M . Докажите, что

$$\vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$

2455. Даны точки $A(-6; -1)$, $B(1; 2)$ и $C(-3; -2)$. Найдите координаты вершины M параллелограмма $ABMC$.

2456. Докажите, что прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$, перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

2457. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

2458. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC . Докажите, что

$$\vec{MA_1} + \vec{MB_1} + \vec{MC_1} = \vec{0}.$$

2459. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых O и O_1 — точки пересечения диагоналей. Докажите равенство:

$$\vec{OO_1} = \frac{1}{4}(\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} + \vec{DD_1}).$$

2460. Даны точки $A(0; 0)$, $B(4; 0)$ и $C(0; 6)$. Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника ABC .

2461. На продолжениях сторон треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\vec{AB_1} = 2\vec{AB}$, $\vec{BC_1} = 2\vec{BC}$ и $\vec{CA_1} = 2\vec{AC}$. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если известно, что площадь треугольника ABC равна S .

2462. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC (рис. 98, а, б). Докажите, что для любой точки O выполняется равенство

$$\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

2463. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC , O — произвольная точка. Докажите, что

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

2464. Найдите длину хорды, которую на прямой $y = 3x$ отсекает окружность $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

2465. Докажите, что прямая $3x - 4y + 25 = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 25$, и найдите координаты точки касания.

2466. Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(2; 1)$.

2467. Найдите координаты точек пересечения окружностей $(x-2)^2 + (y-10)^2 = 50$ и $x^2 + y^2 + 2(x-y) - 18 = 0$.

2468. Даны точки $A(-6; 1)$ и $B(4; 6)$. Найдите координаты точки C , делящей отрезок AB в отношении $2:3$, считая от точки A .

2469. Даны точки $A(5; 5)$, $B(8; -3)$ и $C(-4; 1)$. Найдите координаты точки

пересечения медиан треугольника ABC .

2470. Даны точки $A(-1; 3)$, $B(1; -2)$, $C(6; 0)$ и $D(4; 5)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

2471. Известно, что прямая с угловым коэффициентом k проходит через точку $M(x_0; y_0)$. Докажите, что ее уравнение имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.

2472. Известно, что прямая проходит через точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$, причем $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Докажите, что

$$\text{ее уравнение имеет вид } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

2473. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1; 1)$, $B(9; 3)$ и $C(1; 7)$.

2474. Даны точки $A(-2; 3)$, $B(2; 6)$, $C(6; -1)$ и $D(-3; -4)$. Докажите, что диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны.

2475. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 4)$ перпендикулярно прямой $x - 2y + 4 = 0$.

2476. Даны точки $A(6; 1)$, $B(-5; -4)$, $C(-2; 5)$. Составьте уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника ABC , проведенная из вершины A .

2477. С помощью метода координат докажите, что суммы квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до противоположных вершин прямоугольника равны между собой.

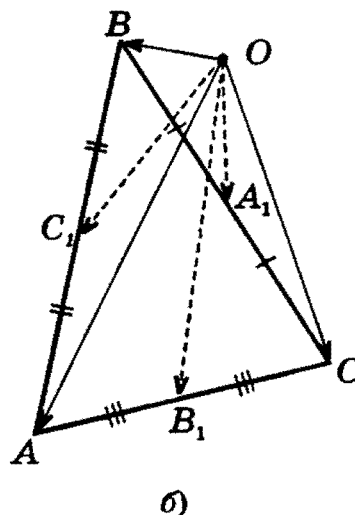
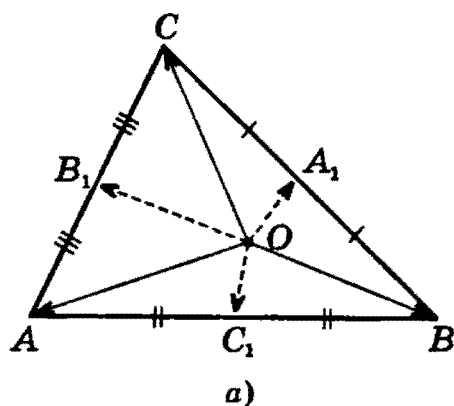


Рис. 98

2478. Пусть M и N — точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR})$.

2479. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

2480. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(0; 7)$ и касающейся окружности

$$(x - 15)^2 + (y - 2) = 25.$$

2481. Даны точки $A(5; -1)$, $B(4; -8)$, $C(-4; -4)$. Найдите координаты точки пересечения высот треугольника ABC .

2482. С помощью метода координат найдите геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.

2483. Докажите, что расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $ax + by + c = 0$, равно $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2484. Составьте уравнение окружности с центром в точке $M(3; 2)$, касающейся прямой $y = 2x + 6$.

2485. Точка M лежит на прямой $3x - 4y + 34 = 0$, а точка N — на окружности $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$. Найдите наименьшее расстояние между точками M и N .

2486. Найдите расстояние между параллельными прямыми $y = -3x + 5$ и $y = -3x - 4$.

2487. Даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ и неотрицательное число λ . Найдите координаты точки M луча AB , для которой $AM : AB = \lambda$.

2488. Даны треугольник ABC и точка M . Известно, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Докажите, что M — точка

пересечения медиан треугольника ABC .

2489. Даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек M , для которых $AM = 2BM$.

2490. Даны точки A , B и положительное число d . Найдите геометрическое место точек M , для которых $AM^2 + BM^2 = d$.

2491. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно такие, что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Известно, что точки B , M и N лежат на одной прямой. Найдите λ .

2492. Докажите, что при произвольном выборе точки O равенство $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$ является необходимым и достаточным условием принадлежности различных точек A , B , C одной прямой.

2493. Стороны параллелограмма разделены по обходу в равных отношениях. Докажите, что точки деления служат вершинами параллелограмма, а центры этих параллелограммов совпадают.

2494. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина AB , K — середина CD . Докажите, что середины отрезков AK , CE , BK и DE являются вершинами параллелограмма.

2495. На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления, совпадают.

2496. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ с единичными сторонами середины P , Q сторон AB , CD и середины S , T сторон BC , DE соединены отрезками PQ и ST . Пусть M и N — середины отрезков PQ и ST . Найдите отрезок MN .

2497. Проведены четыре радиуса OA , OB , OC и OD окружности с центром O . Докажите, что если

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0},$$

то $ABCD$ — прямоугольник.

2498. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{2}$. Точка O выбрана в плоскости квадрата так, что $OB = 10$, $OD = 6$. Найдите угол между вектором OB и вектором, направленным из точки O в наиболее удаленную от нее вершину квадрата.

2499. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого равна 8. Точка O выбрана в плоскости квадрата так, что $OB = 10\sqrt{2}$, $OD = 6\sqrt{2}$. Найдите угол между вектором OB и вектором, направленным из точки O в ближайшую к ней вершину квадрата.

2500. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , O — центр описанной окружности. Докажите, что

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

2501. Точки M , K , N и L — середины сторон AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$, P и Q — середины отрезков MN и KL (рис. 99). Докажите, что

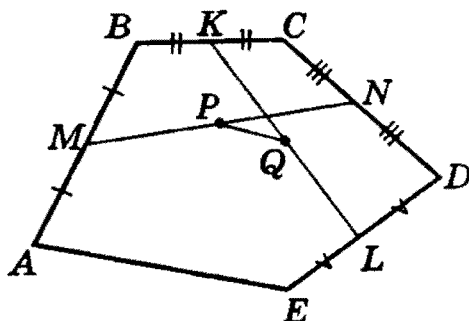


Рис. 99

отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

2502. Из медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC составлен треугольник KMN , а из медиан KK_1 , MM_1 и NN_1

треугольника KMN — треугольник PQR . Докажите, что третий треугольник подобен первому, и найдите коэффициент подобия.

2503. Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1 , MK_2 , MK_3 на его стороны. Докажите, что $\vec{MK}_1 + \vec{MK}_2 + \vec{MK}_3 = \frac{3}{2} \vec{MO}$, где O — центр треугольника.

2504. Докажите, что сумма квадратов расстояний от какой-нибудь точки окружности до вершин правильного вписанного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

2505. Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и прямая $ax + by + c = 0$. Известно, что $ax_1 + by_1 + c > 0$, а $ax_2 + by_2 + c < 0$. Докажите, что точки A и B расположены по разные стороны от этой прямой.

2506. Две окружности касаются внешним образом в точке A . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает окружности в точках B и C . Найдите геометрическое место середин отрезков BC .

2507. O — центр правильного n -угольника $A_1A_2A_3\dots A_n$, X — произвольная точка плоскости.

а) Докажите, что

$$\vec{OA}_1 + \dots + \vec{OA}_n = \vec{0}.$$

б) Докажите, что

$$\vec{XA}_1 + \dots + \vec{XA}_n = n \cdot \vec{XO}.$$

2508. Найдите наименьшее значение выражения

$$|a + b| + \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 3)^2}.$$

2509. Точки K , N , L , M расположены соответственно на сторонах AB , BC , CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, причем $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC} = \alpha$,

$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \beta$. Докажите, что точка пересечения P отрезков KL и MN делит их в тех же отношениях, т. е. $\frac{MP}{PN} = \alpha$, $\frac{KP}{PL} = \beta$.

2510. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам?

2511. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники ADB , BEC и CFA ($\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = k$;

$\angle ABD = \angle BEC = \angle CFA = \alpha$). Докажите, что:

1) середины отрезков AC , DC , BC и EF — вершины параллелограмма;

2) у этого параллелограмма два угла равны α , а отношение сторон равно k .

2512. На координатной плоскости нарисовали график функции $y = x^2$, а затем стерли оси координат. Восстановите их с помощью циркуля и линейки.

2513. Назовем точку плоскости рациональной, если ее обе координаты — рациональные числа. Докажите, что если на окружности $x^2 + y^2 = R$ (R — целое) есть хотя бы одна рациональная точка, то на этой окружности бесконечно много рациональных точек.

12. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2514. Докажите, что при центральной симметрии окружность переходит в окружность.

2515. Докажите, что при центральной симметрии каждый луч переходит в противоположно направленный луч.

2516. Пусть две прямые пересекаются под углом α . Докажите, что при

повороте на угол α (в одном из направлений) относительно произвольной точки одна из этих прямых перейдет в прямую, параллельную другой.

2517. Докажите, что при повороте окружность переходит в окружность.

2518. Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.

2519. Докажите, что при гомотетии окружность переходит в окружность.

2520. Верно ли следующее утверждение: «Если четырехугольник имеет ось симметрии, то это либо равнобедренная трапеция, либо прямоугольник, либо ромб»?

2521. Равнобедренный треугольник ABC с основанием BC повернули вокруг точки C так, что его вершина A оказалась в точке A_1 на прямой BC . При этом вершина B перешла в некоторую точку B_1 , лежащую с точкой A по одну сторону от прямой BC . Докажите, что прямые AB и B_1C параллельны.

2522. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC построены вне его равные треугольники AMB и ANC ($AM = AN$). Докажите, что точки M и N симметричны относительно биссектрисы угла BAC .

2523. Существует ли фигура, не имеющая осей симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?

2524. Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60° (либо по часовой стрелке, либо — против) относительно точки A вершина B переходит в C .

2525. Равнобедренный треугольник ABC с основанием BC повернули вокруг точки C так, что его вершина A оказалась в точке A_1 на прямой BC . При этом вершина B перешла в некоторую точку B_1 , лежащую с точкой A по одну сторону от прямой BC . Полученный таким образом равнобедренный треугольник A_1B_1C повернули вокруг