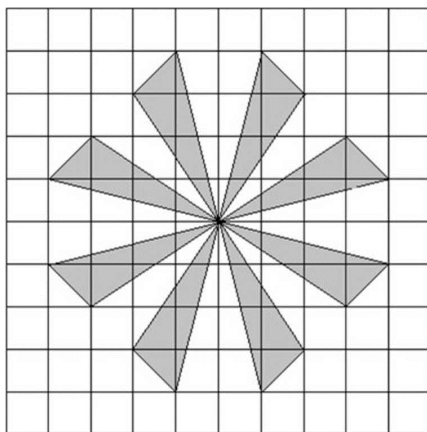


Подготовка к ОПО Математика 1 тур

1. На клетчатом поле с размером клетки 1×1 нарисована заштрихованная фигура, состоящая из восьми «лепестков» (см. рисунок). Каждый «лепесток» имеет форму треугольника, вершины которого расположены в вершинах клеток. Найдите площадь всей этой фигуры.



2. Средний возраст жителей города A равен 32 года, а средний возраст жителей города B - 45 лет. Одна тысяча жителей города A переселилась в город B . После этого средний возраст жителей в каждом городе уменьшится на один год. Общее число жителей в двух городах A и B равно ...

3. Найдите сумму

$$(1+2+4)+(4+6+9)+\dots+(361+680+400) = \sum_{k=1}^{19} (k^2 + k(k+1) + (k+1)^2).$$

4. Функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению $4f(x) + f(x^2 - 1) = 2015$ при всех действительных значениях x . Тогда значение $f(\sqrt{2})$ равно ...

5. Дан определитель n -го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & x \end{vmatrix}$$

Тогда $\Delta_8 = 100$ при x равном ...

6. Члены арифметической прогрессии $x_n = 7n/61$, $n = 1, \dots, 2015$ округлили до ближайших целых чисел и сложили результаты. Получившаяся сумма равна ...

7. Функция $y = y(x)$ задана неявно соотношением $x^3 + y^3 + 3xy = 1$. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{y^3(x) + 1}{x^3 - 8}$$

8. Параболы $\Pi_1 : y = ax^2$, $a < 0$ и $\Pi_2 : y = -ax^2 + 4abx + d$, $b > 0$ имеют только одну общую точку $N(b, ab^2)$. Некоторая прямая пересекает каждую из парабол ровно в одной точке: Π_1 – в точке B_1 , Π_2 – в точке B_2 так, что угол B_1B_2N – прямой, а площадь треугольника B_1B_2N равна $1/3$. Касательная к параболе Π_1 , проведенная в точке B_1 , пересекает отрезок B_2N в точке L . Пусть a_0 и b_0 – значения параметров a и b , при которых длина отрезка B_1L минимальна, тогда значение выражения $45a_0 + 14b_0$ равно ...

9. Пусть расстояние между двумя общими касательными к графикам функции $y = x^3$ и $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ равно d . Тогда величина $100d^2$ равна ...

10. Пусть $S(x)$ – сумма цифр натурального числа x , а $S(8x)$ – сумма цифр числа $8x$. Найдите наибольшее возможное значение $S(x)/S(8x)$

11. Расстояние от начала координат до плоскости $bsx + acy + abz = 1$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) равно 0.1. Площадь S части плоскости $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, расположенной в 1-ом октанте ($x > 0, y > 0, z > 0$), равна ...

12. Найдите сумму ряда

$$\frac{2^3}{2+1} + \frac{2^4}{(2+1)(2^2+1)} + \frac{2^6}{(2+1)(2^2+1)(2^4+1)} + \dots + \frac{2^{2^n+2}}{(2+1)(2^2+1)\dots(2^{2^n}+1)} + \dots$$

13. Известно, что предел $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\rho (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x})$ при некотором ρ равен числу $A \neq 0$. Найдите значение ρ .

14. Вычислите

$$\int_0^{\pi/3} \cos(101x) \cos(x)^{99} dx$$

15. Дана последовательность таких чисел $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10, \dots$ что разности образуют ряд натуральных чисел $a_n - a_{n-1} = n$. Найдите сумму $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{1008}$.

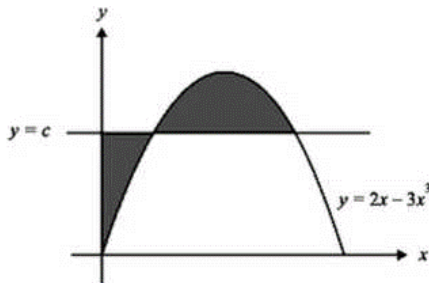
16. Известно, что сумма $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1 + n)$ равна некоторому трехзначному числу, состоящему из одинаковых цифр. Тогда значение n равно ...

17. Окружность с радиусом $R = 2$ разделена точками A, B, C, D на четыре равные дуги. На этой окружности произвольным образом выбирается точка M . Наибольшая возможная сумма четвертых степеней расстояний от точки M до точек A, B, C, D ($AM^4 + BM^4 + CM^4 + DM^4$) равна ...

18. Прямая $y = -3x + 20$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 8$. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) + 4}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

19. Прямая $y = c$ пересекает график функции $y = 2x - 3x^3$ в первой четверти (см. рис.). Пусть значение c , при котором площади закрашенных областей одинаковы, равно C . Найдите значение C .

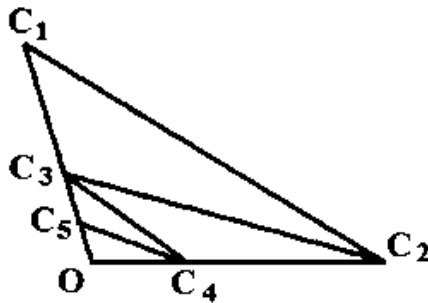


20. Найдите определитель матрицы, все элементы которой на главной диагонали равны 2017, на побочной 2015, а все остальные элементы равны нулю.

21. Дан треугольник C_1C_2O в котором угол $\angle C_1OC_2$ равен $\alpha = 99^\circ$. В треугольнике проводится биссектриса C_2C_3 . Затем в треугольнике C_2C_3O проводится биссектриса C_3C_4 , а в треугольнике C_3C_4O - биссектриса C_4C_5 и так далее (см. рисунок). На шаге n получается треугольник $C_nC_{n+1}O$, в котором угол $\angle C_nC_{n+1}O$ равен γ_n . Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$

22. Последовательность $a_1, a_2, \dots$ - такая, что $|a_1| = 1$, а $|a_{n+1}| = |a_n + 1|$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a_1 + a_2 + \dots + a_{2015}$

23. Производится некоторый опыт по выращиванию культуры микроорганизмов. Опыт организован таким образом, что скорость роста культуры



микроорганизмов μ_Z линейно зависит от их количества x и количества питательных веществ y в некоторый момент времени $t \geq 0$ по закону $\mu_Z = -2x + 4y + \alpha$, ($x > 0, y > 0$). В свою очередь, скорость изменения количества питательных веществ μ_Q в проводимом опыте также линейно зависит от их количества и наличного количества микроорганизмов по закону $\mu_Q = x - 2y + 1$. При каком значении α , количество микроорганизмов стремится к постоянной величине при $t \rightarrow +\infty$

24. Пусть $f(x) = 4^{x+2}/(4^x + 2)$. Найдите сумму

$$f(0) + f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{2}{2016}\right) + \cdots + f\left(\frac{2015}{2016}\right) + f(1)$$

25. Кубик подбрасывают 3 раза. Найдите математическое ожидание наименьшего из трех выпавших чисел.